



เรื่อง

เสถียรภาพเชิงเลขชี้กำลังของระบบตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลาแบบช่วง
Exponential Stability Of Interval Time-Varying Delay System

นำเสนอโดย

นายกิตติธัช เหล็กฉิมมา	รหัสนักศึกษา 6604105301
นายไชยวัฒน์ สองสีขวา	รหัสนักศึกษา 6604105305
นางสาวมณฑนา พรหมแก้ว	รหัสนักศึกษา 6604105315

รายงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของรายวิชา 10305492 โครงการ
ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2568
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยแม่โจ้

โครงการคณิตศาสตร์

เรื่อง

เสถียรภาพเชิงเลขชี้กำลังของระบบตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลาแบบช่วง
Exponential Stability Of Interval Time-Varying Delay System

นำเสนอโดย

นายกิตติรัช เหล็กฉิมมา	รหัสนักศึกษา 6604105301
นายไชยวัฒน์ สองสีขวา	รหัสนักศึกษา 6604105305
นางสาวมณฑนา พรหมแก้ว	รหัสนักศึกษา 6604105315

..... อาจารย์ที่ปรึกษา
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เจนจิรา ทิพย์ชะ)

..... อาจารย์ที่ปรึกษา
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ชนิกานต์ เอ็มหัตถ์)

ชื่อ-สกุล

นายกิตติธัช เหล็กนิมมา รหัสนักศึกษา 6604105301

นายไชยวัฒน์ สองสีขวา รหัสนักศึกษา 6604105305

นางสาวมณฑนา พรหมแก้ว รหัสนักศึกษา 6604105315

อาจารย์ที่ปรึกษา

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เจนจิรา ทิพย์ชะ

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ชนิกันต์ เอ็มฤทธิ์

หัวข้อโครงการ

เสถียรภาพเชิงเลขชี้กำลังของระบบตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลาแบบช่วง
Exponential Stability Of Interval Time-Varying Delay System

บทคัดย่อ

โครงการนี้เป็นการศึกษาเกี่ยวกับการมีเสถียรภาพเชิงเลขชี้กำลังสำหรับระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีตัวหน่วงแปรผันช่วง (interval time-varying delays) โดยได้สร้างฟังก์ชันไลย์ปูนอฟ-คราซอฟสกี (Lyapunov-Krasovskii functional: LKF) ที่เหมาะสมกับระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วง ภายใต้กรอบพื้นฐานของทฤษฎีเสถียรภาพเชิงไลย์ปูนอฟ นอกจากนี้ ยังได้ใช้เทคนิคสมการเชิงปริพันธ์ร่วมกับการใช้เมทริกซ์แต่งเติม (augmented matrix) เพื่อทำให้เกิดข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับตัวหน่วง ซึ่งช่วยลดความอนุรักษ์นิยม ส่งผลให้ได้เงื่อนไขใหม่เพียงพอต่อการมีเสถียรภาพเชิงเลขชี้กำลังของระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วง

กิตติกรรมประกาศ

โครงการคณิตศาสตร์เรื่องเสถียรภาพเชิงเลขชี้กำลังของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีตัวหน้าที่แปรผันตามเวลาแบบช่วงสำเร็จลุล่วงได้ โดยได้รับความอนุเคราะห์เป็นอย่างดี และขอขอบพระคุณอาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เจนจิรา ทิพย์ชะ และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชนิกานต์ เอมหุทัย ที่ได้ให้คำแนะนำ เสนอแนวทาง ตรวจสอบและแก้ไขข้อบกพร่องให้คณะผู้จัดทำโครงการ โดยตลอด

ทางคณะผู้จัดทำโครงการหวังเป็นอย่างยิ่งว่า โครงการคณิตศาสตร์เรื่อง เสถียรภาพเชิงเลขชี้กำลังของระบบตัวหน้าที่แปรผันตามเวลาแบบช่วง ที่จัดทำขึ้น จะเป็นประโยชน์แก่ผู้สนใจที่จะนำไปศึกษาต่อ ในประเด็นที่ได้เสนอแนะไว้ในโครงการฉบับนี้ ให้บรรลุผลอย่างมีประสิทธิภาพต่อไป

1 บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา

ตัวหน่วงที่ขึ้นกับเวลา มักเกิดขึ้นในกระบวนการถ่ายถอดข้อมูลหรือพลังงานมีการถ่ายเทจากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่ง ระบบที่พลวัตของสถานะในอนาคตไม่ได้ขึ้นอยู่กับสถานะปัจจุบันเพียงเดียว แต่ยังขึ้นอยู่กับสถานะในอดีตที่ถูกหน่วงเวลา เรียกว่า ระบบที่มีตัวหน่วงเวลา (Time-delay system) ซึ่งระบบในทางปฏิบัติทั้งในทางวิศวกรรมและทางชีวภาพ สามารถจำลองแบบให้อยู่ในรูปของระบบที่มีตัวหน่วงเวลาได้ ในทางปฏิบัติทั้งในทางวิศวกรรมและทางชีวภาพ สามารถจำลองแบบให้อยู่ในรูปของระบบที่มีตัวหน่วงเวลาได้ [1–5] การปรากฏของตัวหน่วงเวลาในระบบอาจก่อให้เกิดผลกระทบต่อลักษณะเชิงพลวัตของระบบ และอาจเป็นสาเหตุที่ทำให้ระบบเกิดภาวะไม่เสถียร (instability) [6] วิธีฟังก์ชันไลยาปูนอฟ-คราซอฟสกี (Lyapunov–Krasovskii Functional: LKF) เป็นหนึ่งในแนวทางที่ได้รับความนิยมและถูกนำมาใช้อย่างแพร่หลายในการวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบที่มีความหน่วงเวลาแปรผันตามเวลา (time-varying delay) [7] ซึ่งอยู่ภายใต้กรอบทฤษฎีเสถียรภาพของไลยาปูนอฟ มีแนวทางหลักอยู่ 2 ประการในการได้ผลลัพธ์การศึกษาที่ดีขึ้นของเงื่อนไขเสถียรภาพ แนวทางแรกมุ่งเน้นการสร้างฟังก์ชันไลยาปูนอฟ-คราซอฟสกีที่เหมาะสม โดยอาศัยข้อมูลเกี่ยวกับสถานะและตัวหน่วงที่ขึ้นอยู่กับเวลาของระบบ ส่วนแนวทางสองมุ่งเน้นการใช้เทคนิคอสมการเชิงปริพันธ์ที่ใหม่สำหรับการประมาณค่าของบางพจน์ที่อยู่ในรูปปริพันธ์ ส่งผลให้ได้เงื่อนไขของเกณฑ์การมีเสถียรภาพได้อย่างมีประสิทธิภาพและลดการวิเคราะห์ที่มีผลลัพธ์การศึกษาได้มากขึ้น และได้รับการนำมาใช้อย่างแพร่หลายในการวิเคราะห์และจัดการกับปัญหาของระบบที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาในระบบพลวัต [8, 9]

1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษา

1. เพื่อศึกษาระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีตัวหน่วงแปรผันเวลาแบบช่วง
2. เพื่อหาเงื่อนไขเพียงพอที่ทำให้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีตัวหน่วงแปรผันเวลาแบบช่วง เสถียรภาพเชิงเลขชี้กำลัง

1.3 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีตัวหน่วงแปรผันเวลาแบบช่วง
2. ได้เงื่อนไขเพียงพอที่ทำให้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีตัวหน่วงแปรผันเวลาแบบช่วง เสถียรภาพเชิงเลขชี้กำลัง

1.4 ขอบเขตในการศึกษา

พิจารณาระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีตัวหน่วงขึ้นกับเวลาแบบช่วงดังนี้

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bx(t-h(t)), \quad t \geq 0 \\ x(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-h_2, 0] \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

โดยที่ $x(t) \in \mathbb{R}^n$ เป็นเวกเตอร์และตัวหน่วงแปรผันตามเวลา $h(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$h_1 \leq h(t) \leq h_2$$

และ

$$\dot{h}(t) \leq \mu$$

โดยที่

- h_1, h_2 และ μ เป็นค่าคงที่จำนวนจริง
- A, B เป็นเมทริกซ์ค่าคงที่ ขนาด $n \times n$
- $\varphi(t)$ เป็นเซตของฟังก์ชันต่อเนื่องซึ่งส่งจากช่วงปิด $[-h_2, 0]$ ไปยัง $\mathbb{R}^n$ นั่นคือ $\varphi(t) \in C([-h_2, 0], \mathbb{R}^n)$

1.5 สมมุติฐานการศึกษา

ได้เงื่อนไขเพียงพอที่ทำให้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วงเสถียรภาพเชิงเลขชี้กำลัง

1.6 เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

บทนิยาม 1.1 [10] ให้ค่าคงที่ ระบบสมการ $\rho > 0$ จะถูกเรียกว่าเสถียรภาพเชิงเส้นชี้กำลัง ρ (ρ -exponentially stable) ถ้ามี $\gamma > 0$ ซึ่งทำให้ทุกผลเฉลย $x(t)$ ของระบบสมการ สอดคล้องกับเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$\|x(t)\|^2 \leq \gamma e^{-\rho t} \|\varphi\|^2, \quad \forall t \geq 0$$

เมื่อ

$$\|\varphi\|^2 = \sup_{-h_2 \leq s \leq 0} \|x(s)\|^2$$

บทตั้ง 1.2 [10] Schur complement

ให้เมทริกซ์ P, Q และ R เป็นเมทริกซ์ใดๆ ซึ่งมีมิติที่เหมาะสม $P = P^T$ และ $Q = Q^T > 0$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} P & R^T \\ R & -Q \end{bmatrix} < 0 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad P + R^T Q^{-1} R < 0$$

บทตั้ง 1.3 [11] ให้ $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอนและฟังก์ชันเวกเตอร์ที่หาอนุพันธ์ได้ $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ โดยที่ $a < b$ อสมการสองข้อต่อไปนี้เป็นจริง สำหรับ $\delta \in \mathbb{R}^m$ และ $M \in \mathbb{R}^{3n \times m}$

$$-\int_b^a \dot{\omega}^T(s) R \dot{\omega}(s) ds \leq 2\zeta^T(\omega, a, b) \Gamma^T M \delta + (b-a) \delta^T \Theta^{-1} M \delta$$

เมื่อ

$$\zeta(\omega, a, b) = [\omega^T(b) \quad \omega^T(a) \quad \frac{1}{a-b} \int_a^b \omega^T(s) ds \quad \frac{1}{(a-b)^2} \int_a^b \int_s^b \omega^T(u) du ds]^T,$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} I & -I & 0 & 0 \\ I & I & -2I & 0 \\ I & -I & 6I & -12I \end{bmatrix}, \Theta = \text{diag}\{R, 3R, 5R\}$$

2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Le Huy Vu (2025) [10] ได้ศึกษาระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีตัวห้วงเวลาแปรผันตามเวลาแบบผสม โดยอาศัยการสร้างฟังก์ชันไลยาปูนอฟ-คราซอฟสกี ร่วมกับสมการเชิงอินทิกรัลแบบ Wirtinger เพื่อพัฒนาเงื่อนไขเสถียรภาพที่มีความแม่นยำสูง ลดระดับความอนุรักษ์นิยมของเกณฑ์ที่ได้ และให้ผลลัพธ์ที่มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_h(t - h(t)) + A_d \int_{t-d(t)}^t x(s)ds + Au(t), \quad t \geq 0 \\ x(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-k_2, 0] \end{aligned} \right\}$$

โดยที่

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ หมายถึง เวกเตอร์สถานะ
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ หมายถึง เวกเตอร์ควบคุม
- $A, A_h, A_d, A_u \in \mathbb{R}^{n \times n}$ หมายถึง เมทริกซ์ค่าคงที่

ภายใต้เงื่อนไข $0 \leq h_1 \leq h(t) \leq h_2$, $0 \leq d_1 \leq d(t) \leq d_2$, $\dot{h}(t) \leq \varphi < 1$

Fu Dong, Wei Xie, Wei Yi zhu และ Zong Hao Shi (2024) [12] ได้ศึกษาปัญหาเสถียรภาพเชิงเลขชี้กำลังของระบบโครงข่ายประมาทเทียมที่มีตัวห้วงแปรผันตามเวลา โดยได้ประยุกต์ใช้เทคนิคเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนักอิสระแบบเพิ่มตัวแปร ร่วมกับฟังก์ชันไลยาปูนอฟ-คราซอฟสกี และสมการเชิงปริพันธ์ วิธีการดังกล่าวช่วยหลีกเลี่ยงการเกิดพจน์กำลังสูงของตัวห้วงเวลาในอนุพันธ์ของฟังก์ชันไลยาปูนอฟ ทำให้สามารถกำหนดเงื่อนไขเสถียรภาพในรูปสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ซึ่งลดความอนุรักษ์นิยมและความซับซ้อนในการพิสูจน์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

$$\dot{y}(t) = -Ay(t) + W_0g(W_2g(t) + J) + W_1g(W_2y(t - h(t))) + J$$

โดยที่

- $y(t) = [y_1(t)y_2(t)...y_n(t)]^T$ หมายถึง เป็นเวกเตอร์สถานะของเสถียรภาพเชิงเลขชี้กำลัง
- $g(\cdot) = [g_1(\cdot), g_2(\cdot), ..., g_n(\cdot)]^T$ หมายถึง ฟังก์ชันกระตุ้น
- J หมายถึง เวกเตอร์ค่าคงที่
- $A = \text{diag}\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ หมายถึง เมทริกซ์ทแยงมุมค่าคงที่ ; $a_i > 0, i = 1, 2, ..., n$
- $W_k \in \mathbb{R}^{n \times n}; k = 0, 1, 2$ หมายถึงเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนัก

ภายใต้เงื่อนไข $h_1 \leq h(t) \leq h_2, |\dot{h}(t)| \leq \mu$ โดยที่ h_1, h_2 และ μ เป็นค่าคงที่ สมมติให้ $g_i(\cdot)$ คือฟังก์ชันกระตุ้น ซึ่งสอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$k_i^- \leq \frac{g_i(\beta) - g_i(\alpha)}{\beta - \alpha} \leq k_i^+, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta, i = 1, 2, ..., n$$

3 วิธีการดำเนินงาน

จากงานวิจัยที่เกี่ยวข้องคณะผู้เขียนได้ดำเนินการงานในการศึกษาดังต่อไปนี้

1. คณะผู้เขียนได้ศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วง $h(t)$ ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bx(t - h(t)), \\ x(t) &= \varphi(t), t \in [-h_2, 0] \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

เมื่อ $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(\cdot)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[-h_2, 0]$ และให้ A, B เป็นเมทริกซ์ใดๆที่ทราบค่า และให้ $h(t)$ เป็นตัวหน่วงแปรผันตามเวลา ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขดังนี้

$$0 \leq h(t) \leq h_2$$

และ

$$\dot{h}(t) \leq \mu$$

โดยที่ h_1, h_2, μ เป็นค่าคงที่

2. คณะผู้เขียนศึกษานิยามและบทตั้งดังต่อไปนี้

บทนิยาม 3.1 [13] ฟังก์ชัน $V : \mathbb{R} \times C([-h, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^+$ เรียกว่า ฟังก์ชันไลย์ปูนอฟ-คราซอฟสกี (Lyapunov-Krasovskii functional) สำหรับระบบ (3.1) ถ้ามีค่าคงที่ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขดังนี้

$$\begin{aligned} (i) \quad & \lambda_1 \|x(t)\|^2 \leq V(t, x_t) \leq \|x_t\|^2, \\ (ii) \quad & \dot{V}(t, x_t) \leq -\lambda_3 \|x(t)\|^2 \end{aligned}$$

เมื่อ $x_t = x(t + \theta)$, $\theta \in [-h, 0]$

บทนิยาม 3.2 [10] ให้ค่าคงที่ ระบบสมการ $\rho > 0$ จะถูกเรียกว่าเสถียรภาพเชิงเส้นชี้กำลัง ρ (ρ -exponentially stable) ถ้ามี $\gamma > 0$ ซึ่งทำให้ทุกผลเฉลย $x(t)$ ของระบบสมการสอดคล้องกับเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$\|x(t)\|^2 \leq \gamma e^{-\rho t} \|\varphi\|^2, \quad \forall t \geq 0$$

เมื่อ

$$\|\varphi\|^2 = \sup_{-h_2 \leq s \leq 0} \|x(s)\|^2$$

บทนิยาม 3.3 [15] กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์จำนวนจริง ถ้า $A^T = A$ แล้วจะกล่าวว่า A เป็นเมทริกซ์สมมาตร (Symmetric matrix)

บทนิยาม 3.4 [6] กำหนดให้ P เป็นเมทริกซ์สมมาตร จะกล่าวว่า

- (i) P เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน (Positive definite) ก็ต่อเมื่อ $x^T P x > 0$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}^n$ และ $x \neq \bar{0}$
- (ii) P เป็นเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน (Positive semidefinite) ก็ต่อเมื่อ $x^T P x \geq 0$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}^n$ และ $x \neq \bar{0}$
- (iii) P เป็นเมทริกซ์ลบแน่นอน (Negative definite) ก็ต่อเมื่อ $x^T P x < 0$ สำหรับทุก $x^T \in \mathbb{R}^n$ และ $x \neq \bar{0}$
- (iv) P เป็นเมทริกซ์กึ่งลบแน่นอน (Negative semidefinite) ก็ต่อเมื่อ $x^T P x \leq 0$ สำหรับทุก $x^T \in \mathbb{R}^n$ และ $x \neq \bar{0}$

บทตั้ง 3.5 [14] ให้ Ψ_1 และ Ψ_2 เป็นเมทริกซ์ค่าคงที่ที่มีมิติที่เหมาะสม และให้ Σ เป็นเมทริกซ์สมมาตรที่เป็นลบแน่นอน ($\Sigma < 0$) และให้ h_u เป็นสเกลาร์บวกและให้ฟังก์ชัน $h(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, h_u]$ จะได้ว่าอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

$$h(t)\Psi_1 + (h_u - h(t))\Psi_2 + \Sigma < 0$$

ก็ต่อเมื่ออสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$h_u\Psi_1 + \Sigma < 0 \quad \text{และ} \quad h_u\Psi_2 + \Sigma < 0$$

บทตั้ง 3.6 [15] กฎของไลบ์นิซสำหรับการหาอนุพันธ์ของอินทิกรัล (Leibniz Integral Rule) กำหนดให้ $f(x, t)$ เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f(x, t)$ และอนุพันธ์ย่อย $f_x(x, t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทั้งใน t และ x สำหรับบางบริเวณของระนาบ xt โดยรวมถึง $a(x) \leq t \leq b(x), x_0 \leq x \leq x_1$ สมมติว่าฟังก์ชัน $a(x)$ และ $b(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้สำหรับ $t_0 \leq t \leq t_1$ จะได้

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) dx = f(t, b(t))b'(t) - f(t, a(t))a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) dx$$

สำหรับ $t_0 \leq t \leq t_1$

บทตั้ง 3.7 [10] Schur complement

ให้เมทริกซ์ P, Q และ R เป็นเมทริกซ์ใดๆ ซึ่งมีมิติที่เหมาะสม $P = P^T$ และ $Q = Q^T > 0$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} P & R^T \\ R & -Q \end{bmatrix} < 0 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad P + R^T Q^{-1} R < 0$$

บทตั้ง 3.8 [11] Jensen inequality

ถ้ามีเมทริกซ์ใดๆ $R \in S_n^+$ เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอนและสมมาตร n และให้ $\omega : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[\alpha, \beta]$ แล้วอสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$-\int_{\alpha}^{\beta} \omega^T(s) R \omega(s) ds \leq -\frac{1}{\beta - \alpha} \left(\int_{\alpha}^{\beta} \omega(s) ds \right)^T R \left(\int_{\alpha}^{\beta} \omega(s) ds \right)$$

บทตั้ง 3.9 [11] ให้ $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอนและฟังก์ชันเวกเตอร์ที่หาอนุพันธ์ได้ $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ โดยที่ $a < b$ อสมการสองข้อต่อไปนี้เป็นจริง สำหรับ $\delta \in \mathbb{R}^m$ และ $M \in \mathbb{R}^{3n \times m}$

$$-\int_b^a \dot{\omega}^T(s) R \dot{\omega}(s) ds \leq 2\zeta^T(\omega, a, b) \Gamma^T M \delta + (b-a) \delta^T \Theta^{-1} M \delta$$

เมื่อ

$$\zeta(\omega, a, b) = [\omega^T(b) \quad \omega^T(a) \quad \frac{1}{a-b} \int_a^b \omega^T(s) ds \quad \frac{1}{(a-b)^2} \int_a^b \int_s^b \omega^T(u) du ds]^T,$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} I & -I & 0 & 0 \\ I & I & -2I & 0 \\ I & -I & 6I & -12I \end{bmatrix}, \Theta = \text{diag}\{R, 3R, 5R\}$$

บทตั้ง 3.10 [16] สำหรับเมทริกซ์ใดๆ $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ซึ่ง $Y > 0$ และให้ ε_m และ ε_M เป็นจริงสำหรับจริงบวกใดๆ อสมการต่อไปนี้เป็นจริงสำหรับฟังก์ชัน $\xi : [\varepsilon_m, \varepsilon_M] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ที่มีความต่อเนื่องและมีอนุพันธ์ต่อเนื่อง

$$(\varepsilon_M - \varepsilon_m) \int_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_M} \dot{\xi}^T(s) Y \dot{\xi}(s) ds \geq \Gamma_1^T Y \Gamma_1 + 3\Gamma_2^T Y \Gamma_2 + 5\Gamma_3^T Y \Gamma_3,$$

เมื่อ

$$\Gamma_1 = \xi(\varepsilon_M) - \xi(\varepsilon_m),$$

$$\Gamma_2 = \xi(\varepsilon_M) - \xi(\varepsilon_m) - \frac{2}{\varepsilon_M - \varepsilon_m} \int_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_M} \xi(s) ds,$$

$$\Gamma_3 = \xi(\varepsilon_M) - \xi(\varepsilon_m) + \frac{6}{\varepsilon_M - \varepsilon_m} \int_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_M} \xi(s) ds - \frac{12}{(\varepsilon_M - \varepsilon_m)^2} \int_{\varepsilon_m}^{\varepsilon_M} \int_{\theta}^{\varepsilon_M} \xi(s) ds d\theta$$

บทตั้ง 3.11 [16] สมมติ $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าเป็นบวกบนเซตเปิด $D \subset \mathbb{R}^n$ แล้วผลรวมเชิงแบบผกผัน (reciprocally convex combination) ของฟังก์ชันดังกล่าวบนเซต D สอดคล้องกับอสมการดังต่อไปนี้

$$\min_{\{\alpha_i | \alpha_1 > 0, \sum_i \alpha_i = 1\}} \sum_i \frac{1}{\alpha_i} \eta_i(t) = \sum_i \eta_i(t) + \max_{k_{i,j}(t)} \sum_{i \neq j} k_{i,j}(t)$$

มีคุณสมบัติดังนี้

$$\left\{ k_{i,j} : \mathbb{R}^n, K_{i,j} = k_{j,i}, \begin{bmatrix} \eta_i(t) & k_{ij}(t) \\ k_{ji}(t) & \eta_j(t) \end{bmatrix} \geq 0 \right\}$$

3. คณะผู้เขียนได้ทำการพิสูจน์และหาเงื่อนไขของการมีเสถียรภาพของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีตัวห้วงแปรผันตามเวลา (3.1) โดยอาศัยนิยามและบทตั้งต่างๆ ในข้อ 2

4 ผลการดำเนินงาน

ส่วนนี้นำเสนอเกณฑ์การมีเสถียรภาพเชิงเลขชี้กำลังของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วง (3.1) และกำหนดสัญลักษณ์ต่างๆและเมทริกซ์ใดๆ เพื่อใช้ในการนำเสนอตลอดหัวข้อที่ 4 นี้

$$\begin{aligned}\eta_1(t) &= \text{col} \left\{ x(t), x(t-h_1), x(t-h_2), \int_{t-h_2}^t x(s)ds, \int_{t-h_2}^t \int_s^t x(s) duds \right\} \\ \eta_2(s) &= \text{col} \left\{ x(s), \dot{x}(s), \int_s^t x(u)du \right\} \\ \xi(t) &= \text{col} \left\{ x(t), \dot{x}(t), x(t-h(t)), x(t-h_1), x(t-h_2), \dot{x}(t-h_1), \right. \\ &\quad \dot{x}(t-h_2), \int_{t-h(t)}^t x(s)ds, \int_{t-h_1}^t x(s)ds, \int_{t-h_2}^t x(s)ds, \int_{t-h_2}^{t-h(t)} x(s)ds, \\ &\quad \frac{1}{h(t)} \int_{t-h(t)}^t x(s)ds, \frac{1}{h_{t1}} \int_{t-h(t)}^{t-h_1} x(s)ds, \frac{1}{h_{2t}} \int_{t-h_2}^{t-h(t)} x(s)ds, \\ &\quad \frac{1}{h^2(t)} \int_{t-h(t)}^t \int_s^t x(u)duds, \frac{1}{h_{t1}^2} \int_{t-h(t)}^{t-h_1} \int_s^{t-h_1} x(u)duds, \\ &\quad \left. \frac{1}{h_{2t}^2} \int_{t-h_2}^{t-h(t)} \int_s^{t-h(t)} x(u)duds, \int_{t-h_2}^t \int_s^t x(u)duds \right\} \\ h_{12} &= h_1 - h_2, h_{1t} = h_1 - h(t), h_{2t} = h_2 - h(t), h_{t1} = h(t) - h_1\end{aligned}$$

ให้ $e_i \in \mathbb{R}^{n \times 18n}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, 18$) คือเมทริกซ์ที่ถูกระบุนิยามดังนี้ $e_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & I_i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times 18n}$

เช่น $e_2 = \begin{bmatrix} 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

และ $x(t) = e_1 \xi(t)$ เป็นต้น

ทฤษฎีบท 4.1 กำหนดค่าคงที่ h_1, h_2, μ และ $\rho > 0$ ระบบสมการ (3.1) จะเสถียรภาพเชิงเลขชี้กำลัง $-\rho$ ถ้ามีเทริกซ์บวกแน่นอนและเป็นเมทริกซ์สมมาตร $P \in \mathbb{R}^{5n \times 5n}$, $Q_1, G, Y, R \in \mathbb{R}^{18n \times n}$, $Q_2, Q_3 \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ และเมทริกซ์ใดๆ $T_1, T_2 \in \mathbb{R}^{18n \times n}$, $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^{3n \times 18n}$ และเมทริกซ์ใดๆ H ซึ่งมีมิติที่เหมาะสมสอดคล้องกับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วง (3.1) ซึ่งทำให้สมการเมทริกซ์เชิงเส้น (LMIs) ต่อไปนี้จริง

$$\begin{bmatrix} \Phi & e^{2\rho h_2} M_1^T \\ * & -h_2 e^{-2\rho h_2} \Theta \end{bmatrix} < 0 \quad (4.1)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi & e^{-2\rho h_2} M_2^T \\ * & -h_2 e^{-2\rho h_2} \Theta \end{bmatrix} < 0 \quad (4.2)$$

เมื่อ

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5$$

$$\Theta = \text{diag}\{R_1, 3R_1, 5R_1\}$$

$$\Phi_1 = \text{Sym}(\Pi_1^T P \Pi_2) + 2\rho \Pi_1^T P \Pi_1$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 = & e_1^T Q_1 e_1 - (1 - \mu) e^{-2\rho h_2} e_2^T Q_1 e_2 + \Pi_3^T (Q_2 + Q_3) \Pi_3 - e^{-2\rho h_1} (\Pi_4^T Q_2 \Pi_4) \\ & - e^{-2\rho h_2} (\Pi_5^T Q_3 \Pi_5) \end{aligned}$$

$$\Phi_3 = h_1^2 e_2^T G e_2 - e^{-2\rho h_1} [e_1 - e_3]^T G [e_1 - e_3]$$

$$\Phi_4 = h_2 e_2^T Y e_2 + e^{-2\rho h_2} \left[2\Pi_6^T \Gamma^T M_1 + 2\Pi_7^T \Gamma^T M_2 \right]$$

$$\begin{aligned} \Phi_5 = & (h_2 - h_1)^2 e_2^T R e_2 - e^{-2\rho h_2} \Pi_8^T R \Pi_8 - 3e^{-2\rho h_2} \Pi_9^T R \Pi_9 - 5e^{-2\rho h_2} \Pi_{10}^T R \Pi_{10} \\ & - e^{-2\rho h_2} \Pi_{11}^T R \Pi_{11} - 3e^{-2\rho h_2} \Pi_{12}^T R \Pi_{12} - 5e^{-2\rho h_2} \Pi_{13}^T R \Pi_{13} - 2e^{-2\rho h_2} \Pi_8^T R \Pi_{11} \\ & - 6e^{-2\rho h_2} \Pi_9^T R \Pi_{12} - 10e^{-2\rho h_2} \Pi_{10}^T R \Pi_{13} \end{aligned}$$

โดยที่

$$\Pi_1 = [e_1^T \ e_3^T \ e_5^T \ e_{10}^T \ e_{18}^T]^T$$

$$\Pi_2 = [Ae_1^T + Be_3^T \ e_6^T \ e_7^T \ e_1^T - e_5^T \ h_2 e_1^T - e_8^T - e_{11}^T]^T$$

$$\Pi_3 = [e_1^T \ e_2^T \ 0]^T$$

$$\Pi_4 = [e_4^T \ e_6^T \ e_9^T]^T$$

$$\Pi_5 = [e_5^T \ e_7^T \ e_{10}^T]^T$$

$$\Pi_6 = [e_1^T \ e_3^T \ e_{12}^T \ e_{15}^T]^T$$

$$\Pi_7 = [e_3^T \ e_5^T \ e_{14}^T \ e_{17}^T]^T$$

$$\Pi_8 = [e_4^T - e_3^T]^T$$

$$\Pi_9 = [e_4^T + e_3^T - 2e_{13}^T]^T$$

$$\Pi_{10} = [e_4^T - e_3^T + 6e_{13}^T - 12e_{16}^T]^T$$

$$\Pi_{11} = [e_3^T - e_5^T]^T$$

$$\Pi_{12} = [e_3^T + e_5^T - 2e_{14}^T]^T$$

$$\Pi_{13} = [e_3^T - e_5^T + 6e_{14}^T - 12e_{17}^T]^T$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} I & -I & 0 & 0 \\ I & I & -12I & 0 \\ I & -I & 6I & -12I \end{bmatrix}$$

การพิสูจน์ สร้างฟังก์ชัน Lyapunov–Krasovskii ที่เหมาะสมกับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีตัว
หน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วง (3.1) นิยามโดย

$$V(x(t)) = \sum_{l=1}^5 V_l(x(t)) \quad (4.3)$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} V_1(x(t)) &= \eta_1^T(t) P \eta_1(t) \\ V_2(x(t)) &= \int_{t-h(t)}^t e^{2\rho(s-t)} x^T(s) Q_1 x(s) ds + \int_{t-h_1}^t e^{2\rho(s-t)} \eta_2^T(s) Q_2 \eta_2(s) ds \\ &\quad + \int_{t-h_2}^t e^{2\rho(s-t)} \eta_2^T(s) Q_3 \eta_2(s) ds \\ V_3(x(t)) &= h_1 \int_{-h_1}^0 \int_{t+s}^t e^{2\rho(u-t)} \dot{x}^T(u) G \dot{x}(u) du ds \\ V_4(x(t)) &= \int_{-h_2}^0 \int_{t+s}^t e^{2\rho(u-t)} \dot{x}^T(u) Y \dot{x}(u) du ds \\ V_5(x(t)) &= (h_2 - h_1) \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t+s}^t e^{2\rho(u-t)} \dot{x}^T(u) R \dot{x}(u) du ds \end{aligned}$$

ทำการหาอนุพันธ์ของ $V(x(t))$ ที่กำหนดในสมการ (4.3) จะได้

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x(t)) &= \eta_1^T(t) P \dot{\eta}_1^T(t) + \dot{\eta}_1^T(t) P \eta_1(t) \\ &= 2\eta_1^T(t) P \dot{\eta}_1(t) \\ &= 2 \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-h_1) & x^T(t-h_2) & \int_{t-h_2}^t x^T(s) ds & \int_{t-h_2}^t \int_s^t x^T(u) du ds \end{bmatrix} P \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}(t-h_1) \\ \dot{x}(t-h_2) \\ \int_{t-h_2}^t \dot{x}(s) ds \\ \int_{t-h_2}^t \int_s^t \dot{x}(u) du ds \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-h_1) & x^T(t-h_2) & \int_{t-h_2}^t x^T(s) ds & \int_{t-h_2}^t \int_s^t x^T(u) du ds \end{bmatrix} P \\ &\quad \times \begin{bmatrix} Ax(t) + Bx(t-h(t)) \\ \dot{x}(t-h_1) \\ \dot{x}(t-h_2) \\ x(t) - x(t-h_2) \\ \int_{t-h_2}^t [x(t) - x(s)] ds \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-h_1) & x^T(t-h_2) & \int_{t-h_2}^t x^T(s)ds & \int_{t-h_2}^t \int_s^t x^T(u)duds \end{bmatrix} P \\
&\quad \times \begin{bmatrix} Ax(t) + Bx(t-h(t)) \\ \dot{x}(t-h_1) \\ \dot{x}(t-h_2) \\ x(t) - x(t-h_2) \\ x(t) \int_{t-h_2}^t 1ds - \int_{t-h_2}^t x(s)ds \end{bmatrix} \\
&= 2 \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-h_1) & x^T(t-h_2) & \int_{t-h_2}^t x^T(s)ds & \int_{t-h_2}^t \int_s^t x^T(u)duds \end{bmatrix} P \\
&\quad \times \begin{bmatrix} Ax(t) + Bx(t-h(t)) \\ \dot{x}(t-h_1) \\ \dot{x}(t-h_2) \\ x(t) - x(t-h_2) \\ x(t)s|_{t-h_2}^t - \int_{t-h_2}^t x(s)ds \end{bmatrix} \\
&= 2 \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-h_1) & x^T(t-h_2) & \int_{t-h_2}^t x^T(s)ds & \int_{t-h_2}^t \int_s^t x^T(u)duds \end{bmatrix} P \\
&\quad \times \begin{bmatrix} Ax(t) + Bx(t-h(t)) \\ \dot{x}(t-h_1) \\ \dot{x}(t-h_2) \\ x(t) - x(t-h_2) \\ (t - (t-h_2))x(t) - \int_{t-h_2}^t x(s)ds \end{bmatrix} \\
&= 2 \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-h_1) & x^T(t-h_2) & \int_{t-h_2}^t x^T(s)ds & \int_{t-h_2}^t \int_s^t x^T(u)duds \end{bmatrix} P \\
&\quad \times \begin{bmatrix} Ax(t) + Bx(t-h(t)) \\ \dot{x}(t-h_1) \\ \dot{x}(t-h_2) \\ x(t) - x(t-h_2) \\ h_2x(t) - \int_{t-h_2}^t x(s)ds \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$= 2 \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-h_1) & x^T(t-h_2) & \int_{t-h_2}^t x^T(s)ds & \int_{t-h_2}^t \int_s^t x^T(u)duds \end{bmatrix} P \\ \times \begin{bmatrix} Ax(t) + Bx(t-h(t)) \\ \dot{x}(t-h_1) \\ \dot{x}(t-h_2) \\ x(t) - x(t-h_2) \\ h_2x(t) - \left(\int_{t-h(t)}^t x(s)ds + \int_{t-h_2}^{t-h(t)} x(s)ds \right) \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\dot{V}_1(x(t)) = 2 \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-h_1) & x^T(t-h_2) & \int_{t-h_2}^t x^T(s)ds & \int_{t-h_2}^t \int_s^t x^T(u)duds \end{bmatrix} P \\ \times \begin{bmatrix} Ax(t) + Bx(t-h(t)) \\ \dot{x}(t-h_1) \\ \dot{x}(t-h_2) \\ x(t) - x(t-h_2) \\ h_2x(t) - \int_{t-h(t)}^t x(s)ds - \int_{t-h_2}^{t-h(t)} x(s)ds \end{bmatrix} \\ + 2\rho \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t-h(t)) & x^T(t-h_2) & \int_{t-h_2}^t x^T(s)ds & \int_{t-h_2}^t \int_s^t x^T(u)duds \end{bmatrix} P \\ \times \begin{bmatrix} x^T(t) \\ x^T(t-h_1) \\ x^T(t-h_2) \\ \int_{t-h_2}^t x^T(s)ds \\ \int_{t-h_2}^t \int_s^t x^T(u)duds \end{bmatrix} - 2\rho V_1(x(t))$$

จะได้

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x(t)) + 2\rho V_1(x(t)) &= \xi^T(t) \{ \text{Sym}(\Pi_1^T P \Pi_2) + 2\rho(\Pi_1^T P \Pi_1) \} \xi(t) \\ \dot{V}_1(x(t)) + 2\rho V_1(x(t)) &= \xi^T(t) \Phi_1 \xi(t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2(x(t)) &= x^T(t)Q_1x(t) - (1 - \dot{h}(t))e^{-2\rho h(t)}x^T(t-h(t))Q_1x(t-h(t)) \\
&\quad - 2\rho \int_{t-h(t)}^t e^{2\rho(s-t)}x^T(s)Q_1x(s)ds \\
&\quad + \eta_2^T(t)Q_2\eta_2(t) - e^{-2\rho h_1}\eta_2^T(t-h_1)Q_2\eta_2(t-h_1) \\
&\quad - 2\rho \int_{t-h_1}^t e^{2\rho(s-t)}\eta_2^T(s)Q_2\eta_2(s)ds \\
&\quad + \eta_2^T(t)Q_3\eta_2(t) - e^{-2\rho h_2}\eta_2^T(t-h_2)Q_3\eta_2(t-h_2) \\
&\quad - 2\rho \int_{t-h_2}^t e^{2\rho(s-t)}\eta_2^T(s)Q_3\eta_2(s)ds \\
&= x^T(t)Q_1x(t) - (1 - \dot{h}(t))e^{-2\rho h(t)}x^T(t-h(t))Q_1x(t-h(t)) \\
&\quad + \eta_2^T(t)Q_2\eta_2(t) - e^{-2\rho h_1}\eta_2^T(t-h_1)Q_2\eta_2(t-h_1) \\
&\quad + \eta_2^T(t)Q_3\eta_2(t) - e^{-2\rho h_2}\eta_2^T(t-h_2)Q_3\eta_2(t-h_2) \\
&\quad - 2\rho \int_{t-h(t)}^t e^{2\rho(s-t)}x^T(s)Q_1x(s)ds - 2\rho \int_{t-h_1}^t e^{2\rho(s-t)}\eta_2^T(s)Q_2\eta_2(s)ds \\
&\quad - 2\rho \int_{t-h_2}^t e^{2\rho(s-t)}\eta_2^T(s)Q_3\eta_2(s)ds \\
\dot{V}_2(x(t)) &\leq x^T(t)Q_1x(t) - (1 - \mu)e^{-2\rho h_2}x^T(t-h(t))Q_1x(t-h(t)) \\
&\quad + \eta_2^T(t)Q_2\eta_2(t) - e^{2\rho h_1}\eta_2^T(t-h_1)Q_2\eta_2(t-h_1) \\
&\quad + \eta_2^T(t)Q_3\eta_2(t) - e^{2\rho h_2}\eta_2^T(t-h_2)Q_3\eta_2(t-h_2) - 2\rho V_2 \\
&\leq x^T(t)Q_1x(t) - (1 - \mu)e^{-2\rho h_2}x^T(t-h(t))Q_1x(t-h(t)) \\
&\quad + \eta_2^T(t)Q_2\eta_2(t) - e^{-2\rho h_1}\eta_2^T(t-h_1)Q_2\eta_2(t-h_1) \\
&\quad + \eta_2^T(t)Q_3\eta_2(t) - e^{-2\rho h_2}\eta_2^T(t-h_2)Q_3\eta_2(t-h_2) - 2\rho V_2 \\
&\leq x^T(t)Q_1x(t) - (1 - \mu)e^{-2\rho h_2}x^T(t-h(t))Q_1x(t-h(t)) \\
&\quad + \begin{bmatrix} x^T(t) & \dot{x}^T(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_2 + Q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\quad - e^{-2\rho h_1} \begin{bmatrix} x^T(t-h_1) & \dot{x}^T(t-h_1) & \int_{t-h_1}^t x^T(s)ds \end{bmatrix} \\
&\quad \times Q_2 \begin{bmatrix} x(t-h_1) \\ \dot{x}(t-h_1) \\ \int_{t-h_1}^t x(s)ds \end{bmatrix} \\
&\quad - e^{-2\rho h_2} \begin{bmatrix} x^T(t-h_2) & \dot{x}^T(t-h_2) & \int_{t-h_2}^t x^T(s)ds \end{bmatrix} Q_3 \begin{bmatrix} x(t-h_2) \\ \dot{x}(t-h_2) \\ \int_{t-h_2}^t x(s)ds \end{bmatrix} \\
&\quad - 2\rho V_2(x(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2(x(t)) + 2\rho V_2(x(t)) &\leq \xi^T(t) \left[e_1^T Q_1 e_1 - (1 - \mu) e^{-2\rho h_2} e_2^T Q_1 e_2 \right. \\
&\quad \left. + \Pi_3^T (Q_2 + Q_3) \Pi_3 - e^{-2\rho h_1} (\Pi_4^T Q_2 \Pi_4) - e^{-2\rho h_2} (\Pi_5^T Q_3 \Pi_5) \right] \xi(t) \\
&\leq \xi^T(t) \Phi_2 \xi(t)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_3(x(t)) &= h_1 \int_{-h_1}^0 [\dot{x}^T(t) G \dot{x}(t) - e^{2\rho s} \dot{x}^T(t+s) G \dot{x}(t+s) + \int_{t+s}^t \frac{\partial}{\partial t} e^{2\rho(u-t)} \dot{x}^T(u) G \dot{x}(u) du] ds \\
&= h_1^2 \dot{x}^T(t) G \dot{x}(t) - h_1 \int_{t-h_1}^t e^{2\rho(s-t)} \dot{x}^T(s) G \dot{x}(s) ds \\
&\quad - 2\rho h_1 \int_{-h_1}^0 \int_{t+s}^t e^{2\rho(u-t)} \dot{x}^T(u) G \dot{x}(u) du ds \\
&= h_1^2 \dot{x}^T(t) G \dot{x}(t) - h_1 \int_{t-h_1}^t e^{2\rho(s-t)} \dot{x}^T(s) G \dot{x}(s) ds - 2\rho V_3(x(t)) \\
\dot{V}_3(x(t)) + 2\rho V_3(x(t)) &\leq h_1^2 \dot{x}^T(t) G \dot{x}(t) - h_1 e^{-2\rho h_1} \int_{t-h_1}^t \dot{x}^T(s) G \dot{x}(s) ds
\end{aligned} \tag{4.7}$$

โดยใช้บทตั้ง 3.8 ทำการประมาณค่าของพจน์ที่อยู่ในรูปปริพันธ์ของอสมการ (4.7) จะได้

$$\begin{aligned}
-h_1 e^{-2\rho h_1} \int_{t-h_1}^t \dot{x}^T(s) G \dot{x}(s) ds &\leq -e^{-2\rho h_1} \left(\int_{t-h_1}^t \dot{x}^T(s) ds \right) G \left(\int_{t-h_1}^t \dot{x}(s) ds \right) \\
&\leq -e^{-2\rho h_1} [\dot{x}^T(t) - \dot{x}^T(t-h_1)] G [\dot{x}(t) - \dot{x}(t-h_1)] \\
&\leq \xi^T(t) \left\{ -e^{-2\rho h_1} [e_2^T - e_6^T] G [e_2 - e_6] \right\} \xi(t)
\end{aligned}$$

เขียน $\dot{V}_3(x(t))$ ใหม่ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\dot{V}_3(x(t)) + 2\rho V_3(x(t)) &\leq \xi^T(t) \left\{ h_1^2 e_2^T G e_2 - e^{-2\rho h_1} [e_2^T - e_6^T] G [e_2 - e_6] \right\} \xi(t) \\
&\leq \xi^T(t) \Phi_3 \xi(t)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_4(x(t)) &= \int_{-h_2}^0 [\dot{x}^T(t) Y \dot{x}(t) - e^{2\rho s} \dot{x}^T(t+s) Y \dot{x}(t+s) + \int_{t+s}^t \frac{\partial}{\partial t} e^{2\rho(u-t)} \dot{x}^T(u) Y \dot{x}(u) du] ds \\
&= \int_{-h_2}^0 \dot{x}^T(t) Y \dot{x}(t) ds - \int_{t-h_2}^t e^{2\rho(s-t)} \dot{x}^T(s) Y \dot{x}(s) ds \\
&\quad + \int_{-h_2}^0 \int_{t+s}^t \frac{\partial}{\partial t} e^{2\rho(u-t)} \dot{x}^T(u) Y \dot{x}(u) du ds \\
&\leq h_2 \dot{x}^T(t) Y \dot{x}(t) - e^{-2\rho h_2} \int_{t-h_2}^t \dot{x}^T(s) Y \dot{x}(s) ds - 2\rho \int_{-h_2}^0 \int_{t+s}^t e^{2\rho(u-t)} \dot{x}^T(u) Y \dot{x}(u) du ds \\
&\leq h_2 \dot{x}^T(t) Y \dot{x}(t) - e^{-2\rho h_2} \int_{t-h_2}^t \dot{x}^T(s) Y \dot{x}(s) ds - 2\rho V_4(x(t))
\end{aligned} \tag{4.9}$$

พิจารณา $-\int_{t-h_2}^t \dot{x}^T(s) Y \dot{x}(s) ds$ ในอสมการ (4.9) จะได้

$$-\int_{t-h_2}^t \dot{x}^T(s) Y \dot{x}(s) ds = -\int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(s) Y \dot{x}(s) ds - \int_{t-h_2}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s) Y \dot{x}(s) ds$$

จาก $-\int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(s)Y\dot{x}(s)ds$ โดยใช้บทตั้ง 3.9 จะได้

$$\begin{aligned} -\int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(s)Y\dot{x}(s)ds &\leq 2\left[x^T(t) x^T(t-h(t)) \frac{1}{h(t)} \int_{t-h(t)}^t x^T(s)ds \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{(h(t))^2} \int_{t-h(t)}^t \int_s^t x^T(u)duds\right] \Gamma^T M_1 + h(t)M_1^T \Theta^{-1} M_1 \\ &\leq \xi^T(t)(2\Pi_6^T \Gamma^T M_1 + h(t)M_1^T \Theta^{-1} M_1) \end{aligned} \quad (4.10)$$

จาก $-\int_{t-h_2}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s)Y\dot{x}(s)ds$ โดยใช้บทตั้ง 3.9 จะได้

$$\begin{aligned} -\int_{t-h_2}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s)Y\dot{x}(s)ds &\leq 2\left[x^T(t-h(t)) x^T(t-h_2) \frac{1}{h_2-h(t)} \int_{t-h_2}^{t-h(t)} x^T(s)ds \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{(h_2-h(t))^2} \int_{t-h_2}^{t-h(t)} \int_s^{t-h(t)} x^T(u)duds\right] \Gamma^T M_2 \\ &\quad + (h_2-h(t))M_2^T \Theta^{-1} M_2 \\ &\leq \xi^T(t)\left\{2\Pi_7^T \Gamma^T M_2 + (h_2-h(t))M_2^T \Theta^{-1} M_2\right\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

แทนอสมการ (4.10) และ (4.11) ในอสมการ (4.9) จะได้

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(x(t)) + 2\rho V_4 &\leq \xi^T(t)\left\{h_2 e_2^T Y e_2 + e^{-2\rho h_2}\left[2\Pi_6^T \Gamma^T M_1 + h(t)M_1^T \Theta^{-1} M_1 + 2\Pi_7^T \Gamma^T M_2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (h_2-h(t))M_2^T \Theta^{-1} M_2\right]\right\}\xi(t) \\ \dot{V}_4(x(t)) + 2\rho V_4 &\leq \xi^T(t)\left\{\Phi_4 + h(t)M_1^T \Theta^{-1} M_1 + (h_2-h(t))M_2^T \Theta^{-1} M_2\right\}\xi(t) \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_5(x(t)) &= (h_2-h_1) \int_{-h_2}^{-h_1} \left[\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) - e^{2\rho s}\dot{x}^T(t+s)R\dot{x}(t+s) \right. \\ &\quad \left. + \int_{t+s}^t \frac{\partial}{\partial t} e^{2\rho(u-t)}\dot{x}^T(u)R\dot{x}(u)du\right] ds \\ &= (h_2-h_1) \int_{-h_2}^{-h_1} \dot{x}^T(t)R\dot{x}(t)ds - (h_2-h_1) \int_{-h_2}^{-h_1} e^{2\rho s}\dot{x}^T(t+s)R\dot{x}(t+s)ds \\ &\quad - 2\rho(h_2-h_1) \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t+s}^t e^{2\rho(u-t)}\dot{x}^T(u)R\dot{x}(u)duds \\ \dot{V}_5(x(t)) + 2\rho V_5(x(t)) &= (h_2-h_1) \int_{-h_2}^{-h_1} \dot{x}^T(t)R\dot{x}(t)ds - (h_2-h_1) \int_{-h_2}^{-h_1} e^{2\rho s}\dot{x}^T(t+s)R\dot{x}(t+s)ds \\ &= (h_2-h_1)^2 \dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) - (h_2-h_1) \int_{t-h_2}^{t-h_1} e^{2\rho(s-t)}\dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \\ &\leq (h_2-h_1)^2 \dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) - (h_2-h_1)e^{-2\rho h_2} \int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \end{aligned} \quad (4.13)$$

พิจารณา $-(h_2 - h_1) \int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds$ ในอสมการ (4.13) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} -(h_2 - h_1) \int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds &= -(h_2 - h_1) \int_{t-h(t)}^{t-h_1} \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \\ &\quad - (h_2 - h_1) \int_{t-h_2}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds \end{aligned} \quad (4.14)$$

จาก $-(h_2 - h_1) \int_{t-h(t)}^{t-h_1} \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds$ โดยใช้บทตั้ง 3.10 จะได้

$$\begin{aligned} -(h_2 - h_1) \int_{t-h(t)}^{t-h_1} \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds &\leq -\frac{h_2 - h_1}{h(t) - h_1} \left[\left(x^T(t - h_1) - x^T(t - h(t)) \right) R \right. \\ &\quad \times (x(t - h_1) - x(t - h(t))) + 3 \left(x^T(t - h_1) + x^T(t - h(t)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{h(t) - h_1} \int_{t-h(t)}^{t-h_1} x^T(s) ds \right) R \left(x(t - h_1) + x(t - h(t)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{h(t) - h_1} \int_{t-h(t)}^{t-h_1} x(s) ds \right) + 5 \left(x^T(t - h_1) - x^T(t - h(t)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{6}{h(t) - h_1} \int_{t-h(t)}^{t-h_1} x^T(s) ds \right. \\ &\quad \left. - \frac{12}{(h(t) - h_1)^2} \int_{t-h(t)}^{t-h_1} \int_s^{t-h_1} x^T(u) du ds \right) R \\ &\quad \times \left(x(t - h_1) - x(t - h(t)) + \frac{6}{h(t) - h_1} \int_{t-h(t)}^{t-h_1} x(s) ds \right. \\ &\quad \left. - \frac{12}{(h(t) - h_1)^2} \int_{t-h(t)}^{t-h_1} \int_s^{t-h_1} x(u) du ds \right) \Big] \\ &\leq -\frac{h_2 - h_1}{h(t) - h_1} \left[\Gamma_{1,[h_1,h(t)]}^T R \Gamma_{1,[h_1,h(t)]} \right. \\ &\quad \left. + 3 \Gamma_{2,[h_1,h(t)]}^T R \Gamma_{2,[h_1,h(t)]} + 5 \Gamma_{3,[h_1,h(t)]}^T R \Gamma_{3,[h_1,h(t)]} \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

จาก $-(h_2 - h_1) \int_{t-h_2}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds$ โดยใช้บทตั้ง 3.10 จะได้

$$\begin{aligned} -(h_2 - h_1) \int_{t-h_2}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds &\leq -\frac{h_2 - h_1}{h_2 - h(t)} \left[\left(x^T(t - h(t)) - x^T(t - h_2) \right) R \right. \\ &\quad \times \left(x(t - h(t)) - x(t - h_2) \right) + 3 \left(x^T(t - h(t)) \right. \\ &\quad \left. + x^T(t - h_2) - \frac{2}{h_2 - h(t)} \int_{t-h_2}^{t-h(t)} x^T(s) ds \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times R \left(x(t-h(t)) - x(t-h_2) \right. \\
& \quad \left. - \frac{2}{h_2-h(t)} \int_{t-h_2}^{t-h(t)} x(s) ds \right) \\
& + 5 \left(x^T(t-h(t)) - x^T(t-h_2) \right. \\
& \quad + \frac{6}{h_2-h(t)} \int_{t-h_2}^{t-h(t)} x^T(s) ds \\
& \quad \left. - \frac{12}{(h_2-h(t))^2} \int_{t-h_2}^{t-h(t)} \int_s^{t-h(t)} x^T(u) du ds \right) R \\
& \times \left(x(t-h(t)) - x(t-h_2) + \frac{6}{h_2-h(t)} \int_{t-h_2}^{t-h(t)} x(s) ds \right. \\
& \quad \left. - \frac{12}{(h_2-h(t))^2} \int_{t-h_2}^{t-h(t)} \int_s^{t-h(t)} x(u) du ds \right) \Big] \\
& \leq -\frac{h_2-h_1}{h_2-h(t)} \left[\Gamma_{1,[h(t),h_2]}^T R \Gamma_{1,[h(t),h_2]} \right. \\
& \quad + 3 \Gamma_{2,[h(t),h_2]}^T R \Gamma_{2,[h(t),h_2]} \\
& \quad \left. + 5 \Gamma_{3,[h(t),h_2]}^T R \Gamma_{3,[h(t),h_2]} \right] \tag{4.16}
\end{aligned}$$

แทนอสมการ (4.15) และ (4.16) ในอสมการ (4.14) และ ใช้บทตั้ง 3.11 จะได้

$$\begin{aligned}
-(h_2-h_1) \int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{x}^T(s) R \dot{x}(s) ds & \leq - \left[\Gamma_{1,[h_1,h(t)]}^T R \Gamma_{1,[h_1,h(t)]} \right. \\
& \quad \left. + 3 \Gamma_{2,[h_1,h(t)]}^T R \Gamma_{2,[h_1,h(t)]} + 5 \Gamma_{3,[h_1,h(t)]}^T R \Gamma_{3,[h_1,h(t)]} \right] \\
& \quad - \left[\Gamma_{1,[h(t),h_2]}^T R \Gamma_{1,[h(t),h_2]} \right. \\
& \quad \left. + 3 \Gamma_{2,[h(t),h_2]}^T R \Gamma_{2,[h(t),h_2]} + 5 \Gamma_{3,[h(t),h_2]}^T R \Gamma_{3,[h(t),h_2]} \right] \\
& \quad - 2 \left[\Gamma_{1,[h_1,h(t)]}^T R \Gamma_{1,[h(t),h_2]} + 3 \Gamma_{2,[h_1,h(t)]}^T R \Gamma_{2,[h(t),h_2]} \right. \\
& \quad \left. + 5 \Gamma_{3,[h_1,h(t)]}^T R \Gamma_{3,[h(t),h_2]} \right] \tag{4.17}
\end{aligned}$$

นำอสมการ (4.17) แทนในอสมการ (4.13) และเขียน $(\dot{V}_5(x(t)))$ ใหม่ได้ว่า

$$\begin{aligned} \dot{V}_5(x(t)) + 2\rho V_5(x(t)) &\leq (h_2 - h_1)^2 \dot{x}^T(t) R \dot{x}(t) - e^{-2\rho h_2} \left[\Gamma_{1,[h_1,h(t)]}^T R \Gamma_{1,[h_1,h(t)]} \right. \\ &\quad \left. + 3\Gamma_{2,[h_1,h(t)]}^T R \Gamma_{2,[h_1,h(t)]} + 5\Gamma_{3,[h_1,h(t)]}^T R \Gamma_{3,[h_1,h(t)]} \right] \\ &\quad - e^{-2\rho h_2} \left[\Gamma_{1,[h(t),h_2]}^T R \Gamma_{1,[h(t),h_2]} + 3\Gamma_{2,[h(t),h_2]}^T R \Gamma_{2,[h(t),h_2]} \right. \\ &\quad \left. + 5\Gamma_{3,[h(t),h_2]}^T R \Gamma_{3,[h(t),h_2]} \right] \\ &\quad - 2e^{-2\rho h_2} \left[\Gamma_{1,[h_1,h(t)]}^T R \Gamma_{1,[h(t),h_2]} + 3\Gamma_{2,[h_1,h(t)]}^T R \Gamma_{2,[h(t),h_2]} \right. \\ &\quad \left. + 5\Gamma_{3,[h_1,h(t)]}^T R \Gamma_{3,[h(t),h_2]} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_5(x(t)) + 2\rho V_5(x(t)) &\leq \xi^T(t) \left\{ (h_2 - h_1)^2 e_2^T R e_2 - e^{-2\rho h_2} \Pi_8^T R \Pi_8 - 3e^{-2\rho h_2} \Pi_9^T R \Pi_9 \right. \\ &\quad - 5e^{-2\rho h_2} \Pi_{10}^T R \Pi_{10} - e^{-2\rho h_2} \Pi_{11}^T R \Pi_{11} - 3e^{-2\rho h_2} \Pi_{12}^T R \Pi_{12} \\ &\quad - 5e^{-2\rho h_2} \Pi_{13}^T R \Pi_{13} - 2e^{-2\rho h_2} \Pi_8^T R \Pi_{11} - 6e^{-2\rho h_2} \Pi_9^T R \Pi_{12} \\ &\quad \left. - 10e^{-2\rho h_2} \Pi_{10}^T R \Pi_{13} \right\} \xi(t) \end{aligned}$$

จะได้

$$\dot{V}_5(x(t)) + 2\rho V_5(x(t)) \leq \xi^T(t) \Phi_5 \xi(t) \quad (4.18)$$

เพื่อต้องการให้ได้เงื่อนไขที่ดีขึ้นเราจึงเพิ่มสมการศูนย์ดังต่อไปนี้ สำหรับเมทริกซ์ใดๆ H และ $T_i \in \mathbb{R}^{18n \times n} [i = 1, 2]$ จะได้ว่า

$$\left. \begin{aligned} 2\xi^T(t) e_2^T H [Ae_1 + Be_3 - e_2] \xi(t) &= 0 \\ 2\xi^T(t) T_1 [e_{11} - (h_2 - h(t))e_{14}] &= 0 \\ 2\xi^T(t) T_2 [e_8 - h(t)e_{12}] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

จากอสมการ (4.5), (4.6), (4.8), (4.12), (4.18) และ (4.19) เขียน $\dot{V}(x(t))$ ใหม่ จะได้

$$\dot{V}(x(t)) + 2\rho V(x(t)) \leq \xi^T(t) \Phi_0 \xi(t)$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \Phi + h(t) e^{-2\rho h_2} M_1^T \Theta^{-1} M_1 \\ &\quad + (h_2 - h(t)) e^{-2\rho h_2} M_2^T \Theta^{-1} M_2 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $h(t)e^{-2\rho h_2}M_1^T\Theta^{-1}M_1 + (h_2 - h(t))e^{-2\rho h_2}M_2^T\Theta^{-1}M_2$ เป็น convex combination ของเมทริกซ์ $M_1^T\Theta^{-1}M_1$ และ $M_2^T\Theta^{-1}M_2$ ทำให้ได้ว่า $\Phi_0 < 0$ และสอดคล้องกับอสมการของอสมการต่อไปนี้

$$\Phi + h_2e^{-2\rho h_2}M_1^T\Theta^{-1}M_1 < 0 \quad (4.20)$$

และ

$$\Phi + h_2e^{-2\rho h_2}M_2^T\Theta^{-1}M_2 < 0 \quad (4.21)$$

และใช้ Schur complement (4.20) และ (4.21) ทำให้สมมูลกับอสมการ (4.1) , (4.2) ดังนั้นจะได้

$$\dot{V}(x(t)) + 2\rho V(x(t)) \leq 0, \quad \forall t \geq 0$$

และได้ว่า

$$V(x(t)) \leq V(x(0))$$

จาก $V(x(t))$ ซึ่งถูกนิยามในสมการ (4.3) ทำให้ได้ว่า

$$V_1(x(0)) = \eta_1^T(0)P\eta_1(0) \leq \lambda_{\max}(P)\|\varphi\|^2$$

$$\begin{aligned} V_2(x(0)) &= \int_{-h(0)}^0 e^{2\rho s} x^T Q_1 x(s) ds + \int_{-h_1}^0 e^{2\rho s} \eta_2^T(s) Q_2 \eta_2(s) ds + \int_{-h_2}^0 e^{2\rho(s)} \eta_2^T(s) Q_3 \eta_2(s) ds \\ &\leq \left(\frac{1 - e^{-2\rho h_2}}{2\rho} \right) \lambda_{\max}(Q_1) \|\varphi\|^2 + \left(\frac{1 - e^{-2\rho h_1}}{2\rho} \right) \lambda_{\max}(Q_2) \|\varphi\|^2 + \left(\frac{1 - e^{-2\rho h_2}}{2\rho} \right) Q_3 \|\varphi\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_3(x(0)) &= h_1 \int_{-h_1}^0 \int_s^0 e^{2\rho u} \dot{x}^T(u) G \dot{x}(u) du ds \\ &\leq \left[\frac{h_1}{8\rho^3} - \frac{h_1^2}{4\rho^2} e^{-2\rho h_1} + \frac{h_1}{8\rho^3} e^{-2\rho h_1} \right] \lambda_{\max}(G) \left[\lambda_{\max}(A^T A) + 2\lambda_{\max}(A^T B) + \lambda_{\max}(A^T B) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_{\max}(B^T B) \right] \|\varphi\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_4(x(0)) &= \int_{-h_2}^0 \int_s^0 e^{2\rho u} \dot{x}^T(u) Y \dot{x}(u) du ds \\ &\leq \left[\frac{1}{8\rho^3} - \frac{h_1^2}{4\rho^2} e^{-2\rho h_2} + \frac{1}{8\rho^3} e^{-2\rho h_2} \right] \lambda_{\max}(Y) \left[\lambda_{\max}(A^T A) + 2\lambda_{\max}(A^T B) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_{\max}(A^T B) + \lambda_{\max}(B^T B) \right] \|\varphi\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_5(x(0)) &= (h_2 - h_1) \int_{-h_1}^{-h_2} \int_s^0 e^{2\rho u} \dot{x}^T(u) R \dot{x}(u) du ds \\ &\leq \left[\frac{h_1}{4\rho^2} e^{-2\rho h_1} + \frac{1}{8\rho^3} e^{-2\rho h_1} - \frac{1}{4\rho^2} e^{-2\rho h_2} - \frac{1}{8\rho^3} e^{-2\rho h_2} \right] \lambda_{\max}(R) \left[\lambda_{\max}(A^T A) + 2\lambda_{\max}(A^T B) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_{\max}(B^T B) \right] \|\varphi\|^2 \end{aligned}$$

$$V(x(0)) \leq \beta_2 e^{-2\rho t} \|\varphi\|^2$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} \beta_2 = & \lambda_{\max}(P) + \left(\frac{1 - e^{-2\rho h_2}}{2\rho} \right) \lambda_{\max}(Q_1) + \left(\frac{1 - e^{-2\rho h_1}}{2\rho} \right) \lambda_{\max}(Q_2) \\ & + \left(\frac{1 - e^{-2\rho h_2}}{2\rho} \right) Q_3 + \left[\frac{h_1}{8\rho^3} + \frac{h_1^2}{4\rho^2} e^{-2\rho h_2} + \frac{h_1}{8\rho^3} e^{-2\rho h_2} \right] \lambda_{\max}(G) \\ & \times \left[\lambda_{\max}(A^T A) + 2\lambda_{\max}(A^T B) + \lambda_{\max}(B^T B) \right] \\ & + \left[\frac{1}{8\rho^3} + \frac{h_2}{4\rho^2} e^{-2\rho h_2} + \frac{1}{8\rho^3} e^{-2\rho h_2} \right] \lambda_{\max}(Y) \\ & \times \left[\lambda_{\max}(A^T A) + 2\lambda_{\max}(A^T B) + \lambda_{\max}(B^T B) \right] \end{aligned}$$

นอกจากนี้

$$V(x(t)) \geq \lambda_{\min}(P) \|x(t)\|^2$$

ดังนั้น

$$\|x(t)\|^2 \leq \frac{\beta_2}{\lambda_{\min}(P)} e^{-2\rho t} \|\varphi\|^2$$

ดังนั้นระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีตัวห้วงแปรผันตามเวลาแบบช่วง (3.1) เป็นเสถียรภาพเชิงเลขชี้กำลัง- ρ

5 สรุป

จากการศึกษาระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีตัวห้วงแปรผันตามเวลาแบบช่วง โดยได้สร้างฟังก์ชันไลยาปูนอฟ-คราซอฟสกี ที่เหมาะสมกับระบบสมการ (3.1) และใช้เทคนิคสมการเชิงปริพันธ์ในการประมาณค่าของพจน์ที่อยู่ในรูปปริพันธ์ และการใช้เมทริกซ์แตงเต้ม ช่วยทำให้ได้ตัวแปรที่ขึ้นกับตัวห้วง ส่งผลให้ได้เงื่อนไขใหม่ที่เพียงพอต่อการมีเสถียรภาพเชิงเลขชี้กำลังของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีตัวห้วงแปรผันตามเวลาแบบช่วง

เอกสารอ้างอิง

- [1] J.-P. Richard. Time-delay systems: An overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39(10):1667–1694, 2003.
- [2] G. Liu, J. Mu, D. Rees, and S. Chai. Design and stability analysis of networked control systems with random communication time delay using the modified mpc. *International Journal of Control*, 79(4):288–297, 2006.
- [3] J. Chiasson, Z. Tang, J. Ghanem, C. T. Abdallah, J. D. Birdwell, M. M. Hayat, and H. Jérez. The effect of time delays on the stability of load balancing algorithms for parallel computations. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 13(6):932–942, 2005.
- [4] H.-W. Na, J. H. Lee, and H. S. Lee. Relaxation of second-order matrix-valued multivariate polynomial inequalities: Application to the stability analysis of linear systems with two additive time-varying delays. In *Proceedings of the 63rd IEEE International Conference on Decision and Control (CDC)*. IEEE, 2024.
- [5] A. Zahaf, S. Bououden, M. Chadli, and M. Chemachema. Robust fault tolerant optimal predictive control of hybrid actuators with time-varying delay for industrial robot arm. *Asian Journal of Control*, 24(1):1–15, 2022.
- [6] L. Dugard and E. I. Verriest. *Stability and Control of Time Delay Systems*. Springer, 1998.
- [7] L. Chen, T. Huang, J. T. Machado, A. M. Lopes, Y. Chai, and R. Wu. Delay-dependent criterion for asymptotic stability of a class of fractional-order memristive neural networks with time-varying delays. *Neural Networks*, 118:289–299, 2019.
- [8] X. Zhang, Q. Han, X. Ge, and D. Ding. An overview of recent developments in lyapunov-krasovskii functionals and stability criteria for recurrent neural networks with time-varying delays. *Neurocomputing*, 313:392–401, 2018.
- [9] X. Zhang and Q. Han. Global asymptotic stability analysis for delayed neural networks using a matrix-based quadratic convex approach. *Neural Networks*, 54:57–69, 2014.
- [10] L. H. Vu. Exponential stability and controller design for linear systems with mixed interval time-varying delays. *International Journal of Dynamics and Control*, 13:17, 2025.

- [11] F. Li, W. Xie, W. Zhu, and Z. Shi. Improved stability analysis of neural networks with time delay based on variable augmented free weight matrix. *Neural Processing Letters*, 56:216, 2024.
- [12] Xian-Ming Zhang, Min Wu, Jin-Hua She, and Yong He. Delay-dependent stabilization of linear systems with time-varying state and input delays. *Automatica*, 41(8):1405–1412, August 2005.
- [13] V. L. Kharitonov. Lyapunov–krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems. *Automatica*, 39(1):15–20, 2003.
- [14] L. Sheng and H. Yang. Novel global robust exponential stability criterion for uncertain bam neural networks with time-varying delays. *Chaos, Solitons & Fractals*, 40(5):2102–2113, 2009.
- [15] Murray H. Rotter and Charles B. Morrey Jr. Differentiation under the integral sign. In *Intermediate Calculus*, pages 421–426. Springer, New York, 2 edition, 1985.
- [16] Issaraporn Khonchaiyaphum, Nayika Samorn, Arthit Hongsri, and Kanit Mukdasai. Robust finite-time stability criteria for genetic regulatory networks with mixed time-varying delays and uncertainties under nondifferentiable delay conditions. *IEEE Access*, 2025.
- [17] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.